LINEARE ALGEBRA - JIL KASAR & DILARA KÖSGER

GERADEN & EBENEN

GLIEDERUNG

- Parameterdarstellung & Punktprobe
- Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
- Spurpunkte
- Komplexere Problemstellungen
- Weitere Darstellungsformen einer Ebene
- Abstandsbestimmungen

PARAMETERDARSTELLUNG & PUNKTPROBE

- **Geraden:**
  - $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ — Richtungsvektor

    Stützvektor ($\vec{p}$), Parameter (t)

- **Punktprobe:**
  1. Punkt mit $g: \vec{x}$ gleichsetzen
  2. Prüfen ob es einen gemeinsamen Parameter (t) für alle 3 Zeilen gibt

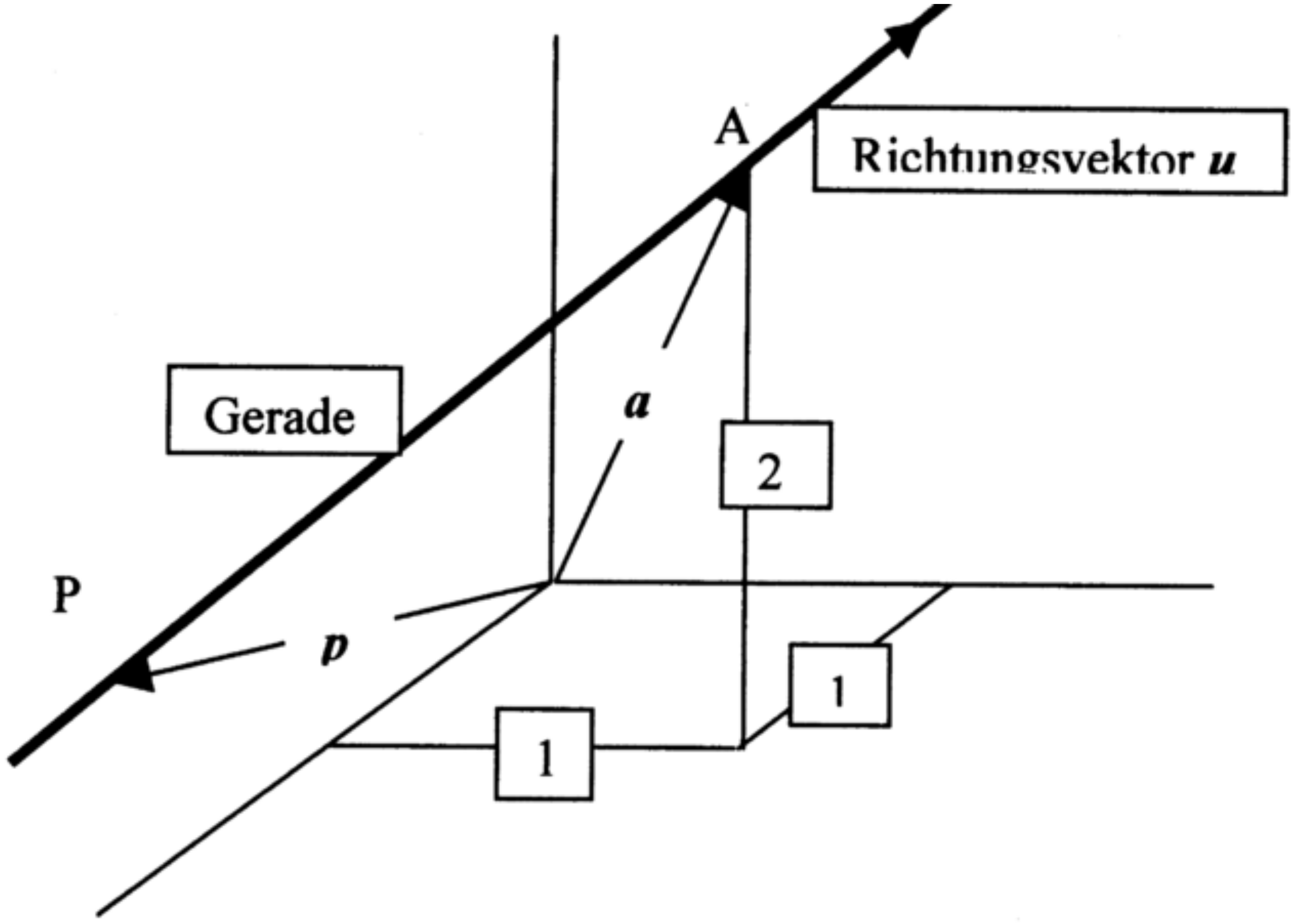


Abb.5 Am Stützvektor *a* ist der Richtungsvektor *u* angehängt. Vielfache von *u* erreichen jeden Geradenpunkt P.

ÜBUNGSAUFGABE BUCH S.95

Runde 1

1 Die Gerade g geht durch die Punkte $A(-1|2|-3)$ und $B(5|8|7)$.

a) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden g an.

b) Liegt der Punkt $P(8|11|12)$ auf der Geraden?

c) Geben Sie eine zu g parallele Gerade an, die durch den Ursprung geht.

d) Geben Sie die Spurpunkte der Geraden g an.

1

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) Ja, der Punkt P liegt auf der Geraden $(s = 1{,}5)$.

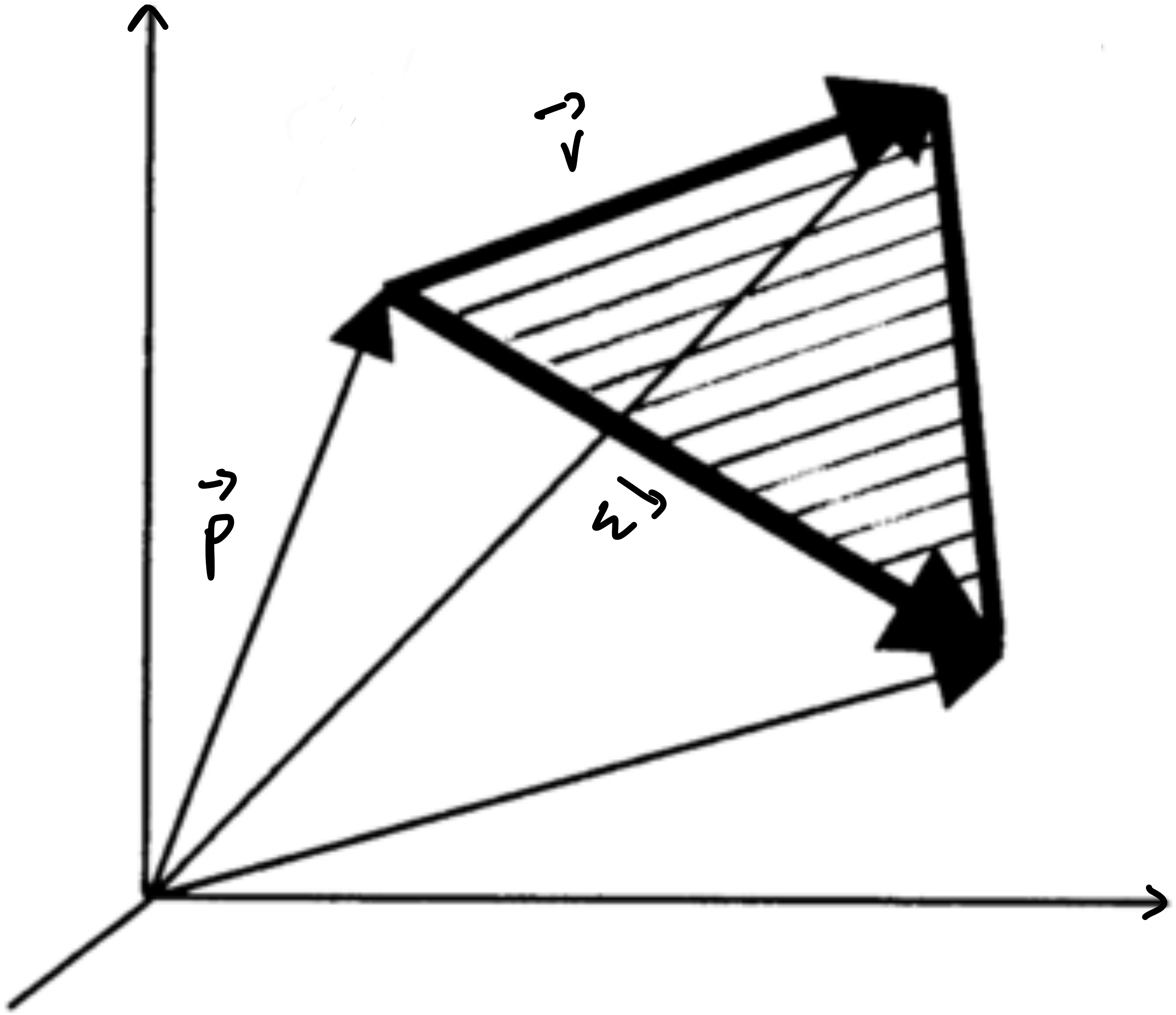
c) $h: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $S_{12}(0{,}8 \,|\, 3{,}8 \,|\, 0)$, $S_{13}\left(-3 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, -\frac{19}{3}\right)$ und $S_{23}\left(0 \,\middle|\, 3 \,\middle|\, -\frac{4}{3}\right)$

PARAMETERDARSTELLUNG & PUNKTPROBE

- **Ebenen:**
  - $E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$
- **Punktprobe:**

1. Punkt mit $E: \vec{x}$ gleichsetzen
2. Nach r & s Auflösen und in Zeile I überprüfen



ÜBUNGSAUFGABE

- $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Punkt A (7|5|4)

  - ***Befindet sich A auf $E: \vec{x}$?***

LÖSUNG

1. $A \stackrel{?}{=} E: \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. LGS aufstellen & lösen

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{I} & 7 = 2 + 1r + 2s & \Leftrightarrow & 5 = 1r + 2s & \\ \mathrm{II} & 5 = 0 + 3r - 1s & \Leftrightarrow & 5 = 3r - 1s & \\ \mathrm{III} & 4 = 1 + 5r + 1s & \Leftrightarrow & 3 = 5r + 1s & \mathrm{III}_b = \mathrm{II} + \mathrm{III} \end{array}$$

$\mathrm{III}_b \quad 8 = 8r \quad | : 8$

$1 = r$

$r = 1$ in II:

$5 = 3 \cdot (1) - 1s \quad | -3$

$2 = -s \quad | \cdot (-1)$

$-2 = s$

3. Überprüfen in Gleichung I

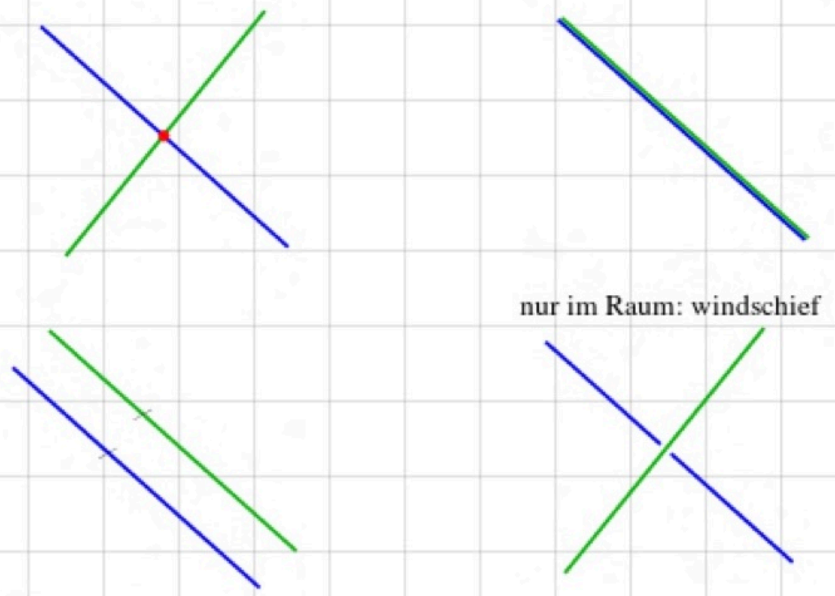
$r = 1$ und $s = -2$ in I

$5 \stackrel{?}{=} 1 \cdot (1) + 2 \cdot (-2) = 1 - 4 \neq -3$ ↯

Punkt A liegt NICHT in Ebene $E: \vec{x}$

GERADEN & EBENEN IM RAUM

Lagebeziehungen Gerade und Gerade



Richtungsvektoren vergleichen

Vielfache

Keine Vielfache

Parallel/identisch

Punktprobe

✓ Identisch

✗ Parallel

Schnittpunkt/windschief

Gleichsetzen

✓ Schnittpunkt

✗ Windschief

Lagebeziehungen Gerade und Ebene

Bestimmung der Schnittpunkte:

↓ 1SP

Schnittpunkt

↓ 0SP

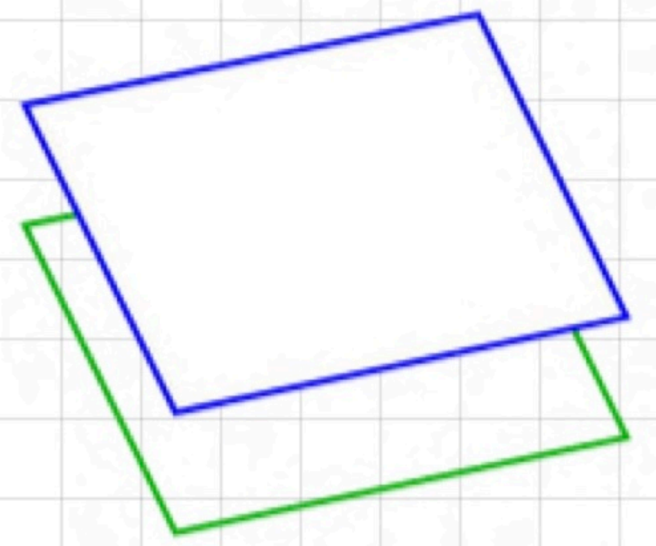
Parallel

↓ ∞ SP

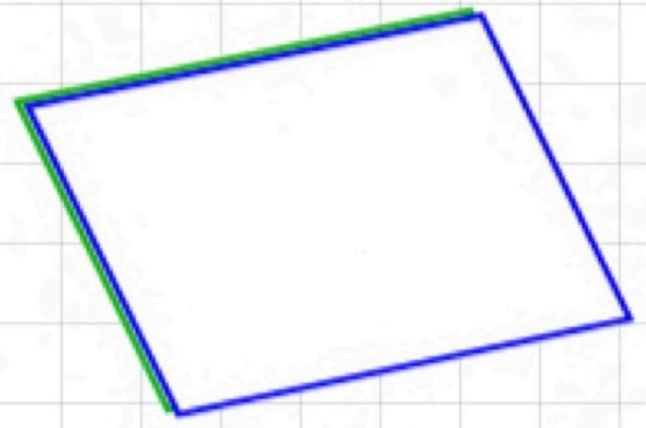
Identisch

Lagebeziehungen Ebene und Ebene

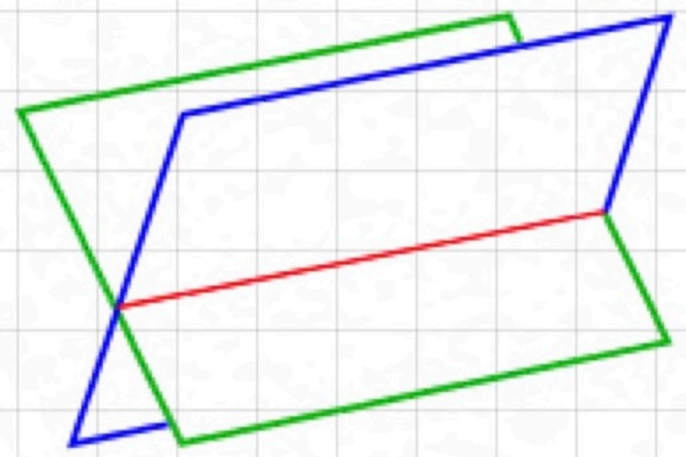
Ebenen gleichsetzen und Gleichung auflösen



$0 \neq 7$ Falsche Aussage –> parallel



$0 = 0$ Wahre Aussage –> identisch



Nicht lösbar –> Schnittgerade

Schnittgerade berechnen :

Beispiel: $t - 2u = 8$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nach t oder u umstellen und in Ebenengleichung einsetzen

$= \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (8 - 2u) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zusammenfassen

Schnittgerade: $\begin{pmatrix} 31 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgaben:

a) Wie verhalten sich die geraden zueinander?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: x + 4y - 11z = 3$$

c) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen.

$$E: 3x - 2y + 5z = 18$$

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel von zwei Geraden

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \overset{\vec{a}}{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

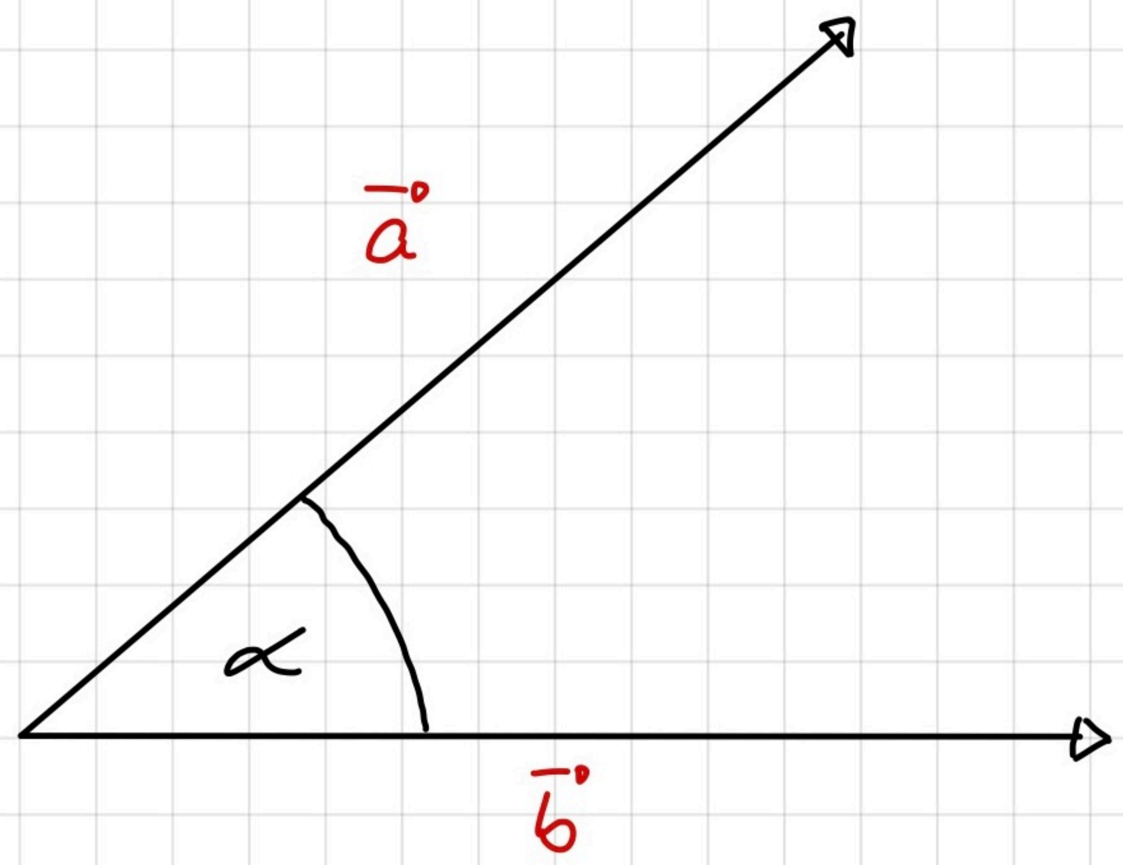
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \overset{\vec{b}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \cos(\alpha) = 0{,}896$$

$$\alpha = \underline{\underline{26{,}41^\circ}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$



SPURPUNKTE

- **Von Geraden mit Koordinaten Ebenen:**
  - xy-Ebene: z = 0 <–> (x | y | 0) also 3. Zeile betrachten
  - xz-Ebene: y = 0 <–> (x | 0 | z) also 2. Zeile betrachten
  - yz-Ebene: x = 0 <–> (0 | y | z) also 1. Zeile betrachten

  nach t auflösen
  und
  in g:x einsetzen

- **Von Ebenen mit Koordinaten Achsen:**
  - x-Achse: y & z = 0 <–> (x | 0 | 0) = E:x dann 2. & 3. Zeile betrachten
  - y-Achse: x & z = 0 <–> (0 | y | 0) = E:x dann 1. & 3. Zeile betrachten
  - z-Achse: x & y = 0 <–> (0 | 0 | z) = E:x dann 1. & 2. Zeile betrachten

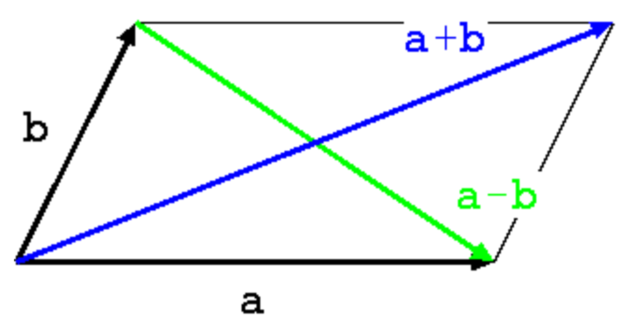
  nach r & s auflösen
  und
  in E:x einsetzen

12 Gibt es einen Punkt von g, der auf der x_1-Achse liegt?

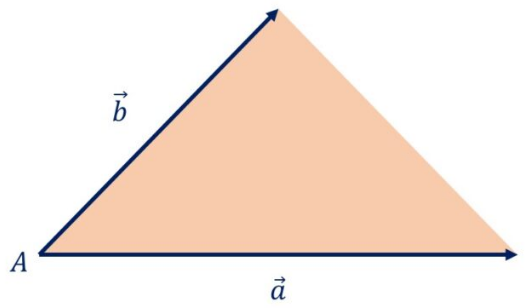
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

KOMPLEXE PROBLEMSTELLUNGEN

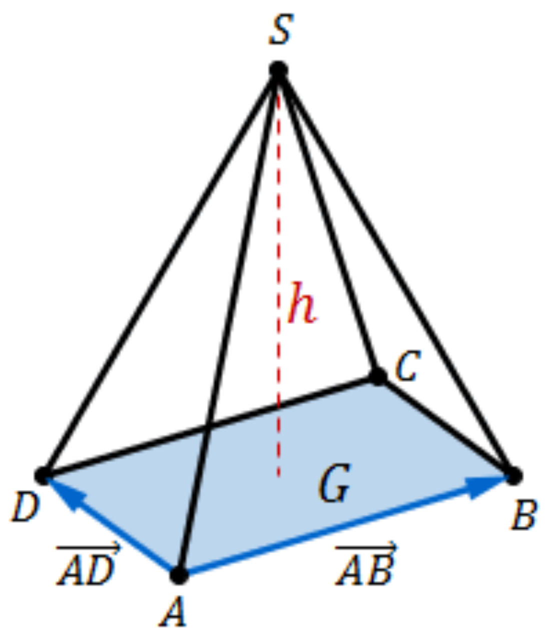
- Untersuchen geometrischer Objekte im Raum
  - $A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$



  - $A_{\text{Dreieck}} = 1/2 \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$



  - $V_{\text{Pyramide}} = 1/3 \cdot G \cdot h = 1/3 \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c|$



KOMPLEXE PROBLEMSTELLUNGEN

- <u>Beschreiben und Untersuchen geradliniger Bewegungen:</u>
  - Beschreibung als Ort-Zeit-Gleichung
    - Geschwindigkeit: $|\overrightarrow{RV}|$
    - Parameter: Zeit
    - 3. Zeile: Höhe/Tiefe bzw. Steigung/Fall
      - Für Zeitpunkt der gleiche Höhe/Tiefe g:x = h:x <=> t
    - Für Kollision g:x $\wedge$ h:x (nur ein t)
    - Schnittpunkt 2D für xy-Ebene z.B: 1. & 2. Zeile betrachten mit t_1 & t_2

ÜBUNGSAUFGABE

● **10** In einem Koordinatensystem entspricht die x_1x_2-Ebene der Meeresoberfläche.
Das Tauchboot T_1 befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung und zwei Minuten später im Punkt $(104\,|\,128\,|\,-32)$.
Das Tauchboot T_2 befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt $(800\,|\,400\,|\,-100)$ und fünf Minuten später im Punkt $(450\,|\,785\,|\,-170)$ (1LE entspricht 1m, die Zeit wird in Minuten gemessen).

a) Geben Sie für beide Boote eine Zeit-Ort-Gleichung an und berechnen Sie jeweils die Geschwindigkeit in $\frac{m}{min}$. Wie weit sind die Boote zum Zeitpunkt $t = 0$ voneinander entfernt?

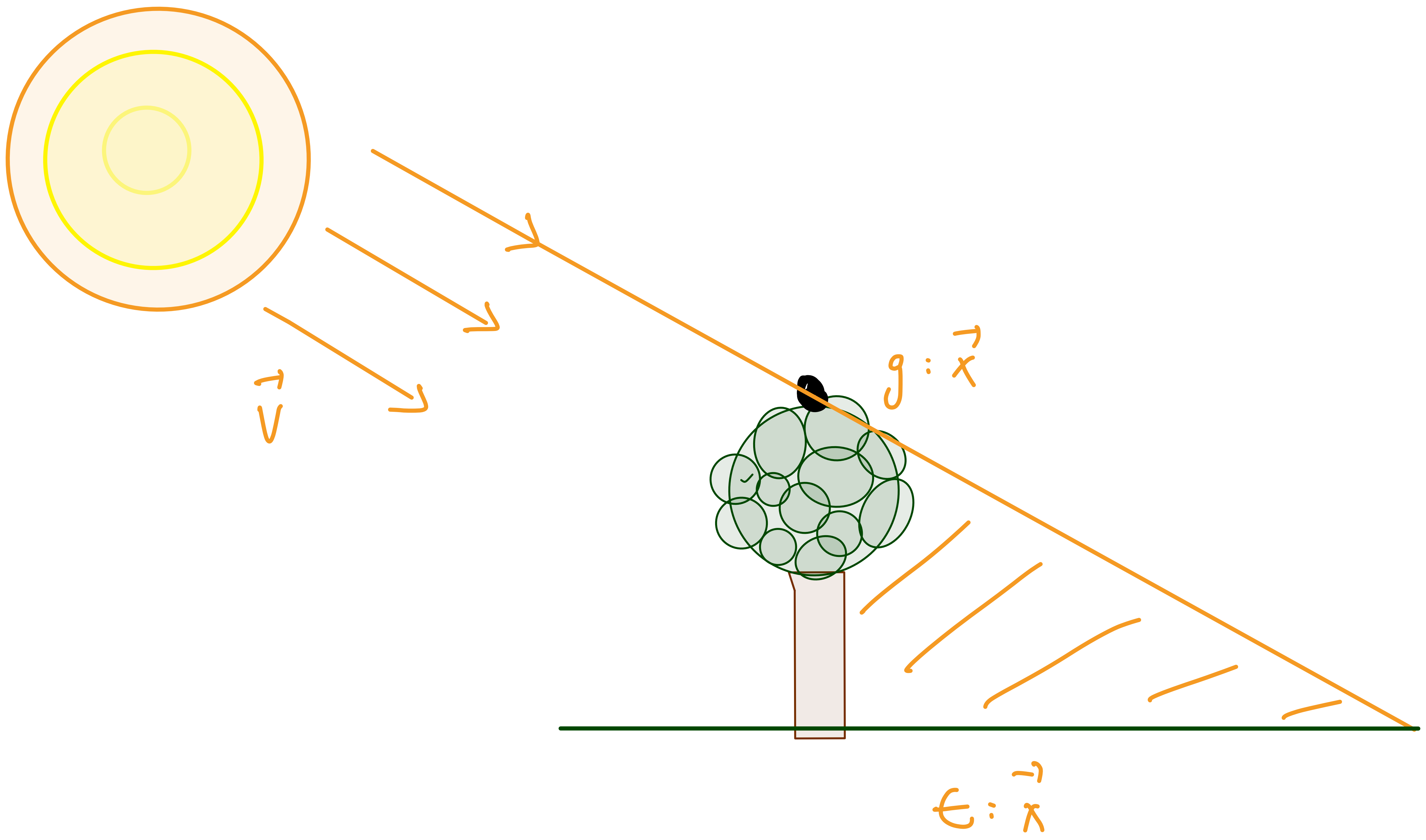
b) Welches der beiden Boote taucht schneller in Richtung Meeresboden? Zu welchem Zeitpunkt befinden sich beide Boote in derselben Tiefe? In welcher Tiefe befinden sie sich dann?

c) Die Boote werden von einem Satelliten beobachtet. Der Satellit zeichnet die Positionen der Boote ohne Berücksichtigung der jeweiligen Tiefen auf. In welchem Punkt schneiden sich diese Bahnen? In welcher Tiefe befinden sich die Boote dann jeweils? (Runden Sie Zwischen- und Endergebnisse jeweils auf eine Dezimale.)

KOMPLEXE PROBLEMSTELLUNGEN

$B(6|8|0)$ $h = 14m$

- <u>Untersuchen von Schattenwürfen:</u>
  - Baum Beispiel



Sonnenstrahlen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schattengerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schattenebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

WEITERE DARSTELLUNGSFORMEN EINER EBENE

- Parameterform
  - $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
- Normalenform
  - $E: \vec{n} \, (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
- Koordinatenform
  - $E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$

Bsp.: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

$\mathrm{I}\quad x = 1 - 3r + t$

$\mathrm{II}\quad y = 1 + r - 3t$

$\mathrm{III}\quad z = -3 + t$

$+\ \cdot 3 = \mathrm{IV}$

$\mathrm{IV}\quad x + 3y = 4 - 8t$

$\mathrm{III}\quad z = -3 + t$

$+\ \cdot 8 = \mathrm{V}$

$\mathrm{V}\quad x + 3y + 8z = -20 \Leftarrow$ Koordinatenform

Bsp.: $E: 2x_1 + x_2 + x_3 = 4$; wähle $x_1 = r$ & $x_2 = t$

also $\Rightarrow 2r + t + x_3 = 4$ nach x_3 umformen $x_3 = 4 - 2r - 1t$

$E: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1r\\1t\\4-2r-1t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Parameterform

$E: \vec{x} = \vec{OA} + r\cdot\vec{AB} + t\cdot\vec{AC}$

$\vec{OA} = \vec{a} \Leftrightarrow$ Richtungsvektor

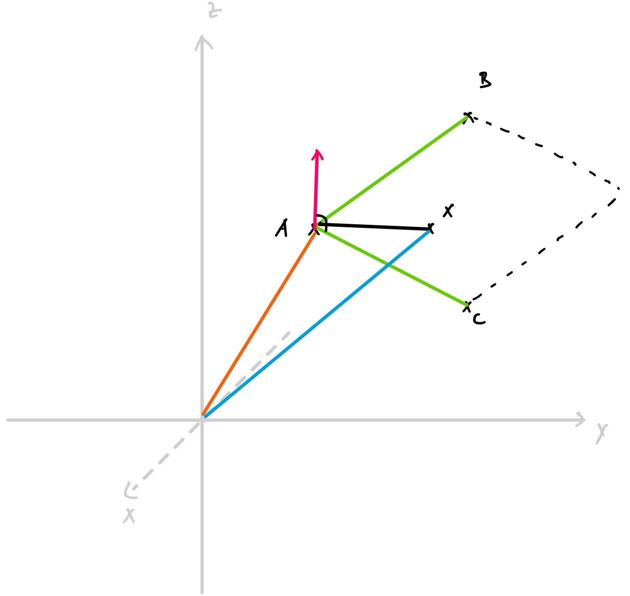
$\vec{AB}$ & $\vec{AC} \Leftrightarrow$ Richtungsvektor

PRO	CON
- einfaches Aufstellen	- aufwendige Punktprobe
- hohe Anschaulichkeit	- unpraktisch für Abstände

für $\vec{n}$ Kreuzprodukt von RV

Formel:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$$



Koordinatenform

$E: a\cdot x_1 + b\cdot x_2 + c\cdot x_3 = d$

PRO	CON
- einfache Punktprobe	- aufwändiges Aufstellen
- erkennen von Parallelität & Spurpunkten	- mehrere Lösungen

$E: \vec{n}\cdot[\vec{x} - \vec{a}] = 0$

$E: \vec{n}\cdot\vec{x} - \vec{n}\cdot\vec{a} = 0$

$E: \vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot\vec{a}$

$\Rightarrow E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

Normalenform

$E: \vec{n}\cdot(\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$\vec{n} \Leftrightarrow$ Normalenvektor

↳ senkrecht zu Richtungsvektoren

PRO	CON
- hilfreich für Lagebeziehung → Abstände, Winkel ...	- aufwendiges Aufstellen → Kreuzprodukt
- hilfreich für Koordinatenform	

Bsp.: $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$ $=0$, $4=0$ in 2 Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\13\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$

y & z vertauschen und VZ wechseln von einem !

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$

Bsp.: $3x + 2y + 2z = 6$

$\vec{n}$: besteht aus den Koeffizienten : $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

für anderen Vektor: $y = 0$ & $z = 0$

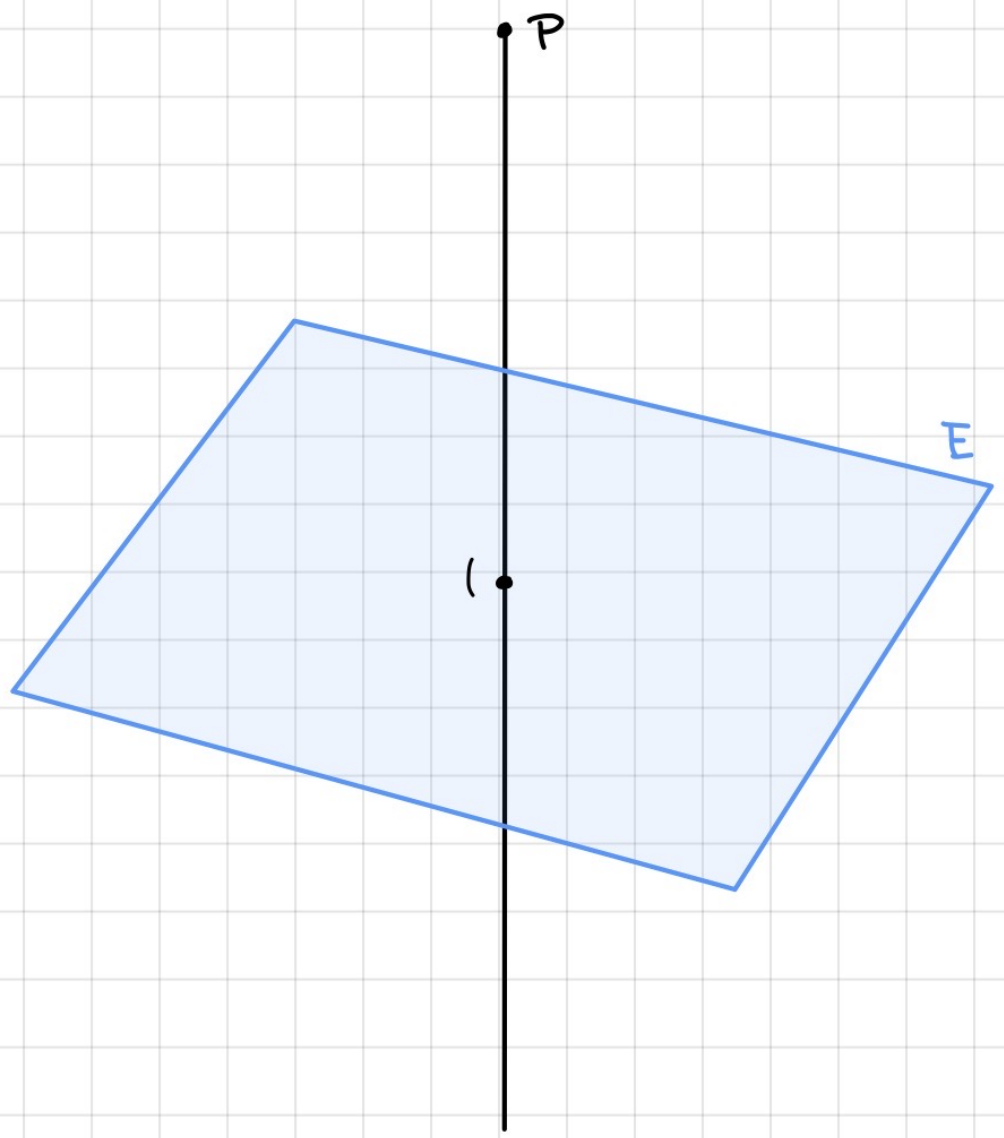
$\Rightarrow 3x = 6 \ |:3 \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $(2|0|0)$

$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = 0$

Abstände/ Lotfußpunktverfahren:

E: $2x_1+1x_2-1x_3=2$ P:(2/1/1) $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

↳ Immer in Koordinatenform! $\vec{n}$=n-Vektor



1.

L: $\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{p}}+t\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{n}}$

2.

$\left.\begin{array}{l}x_1=2+2t\\x_2=1+1t\\x_3=1-1t\end{array}\right]$ ▸ Einsetzen in Ebenengleichung

$2\cdot(2+2t)+1+1t-(1-1t)=2$

$t=-1/3$

$$\begin{array}{l}x_1=2+(-\tfrac{1}{3})\cdot 2\\x_2=1+(-\tfrac{1}{3})\cdot 1\\x_3=1+(-\tfrac{1}{3})\cdot(-1)\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}x_1=\\x_2=\\x_3=\end{array}\begin{pmatrix}4/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix}\Rightarrow$$ Vektor der den Lotpunkt l angibt

l (4/3 / 2/3 / 4/3)

3. $|\vec{Pl}|$

$$\vec{Pl}=\begin{pmatrix}2-4/3\\1-2/3\\(-1)-4/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-7/3\end{pmatrix}$$

$$|\vec{Pl}|=\sqrt{4/3^2+1/3^2+(-7/3)^2}=\sqrt{22/3}=\underline{\underline{2,7}}\ [LE]$$

Aufgabe:

Bestimmen Sie den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.

E: $\vec{x}$ = $2x+5y-z=69$

P (1/2/3)