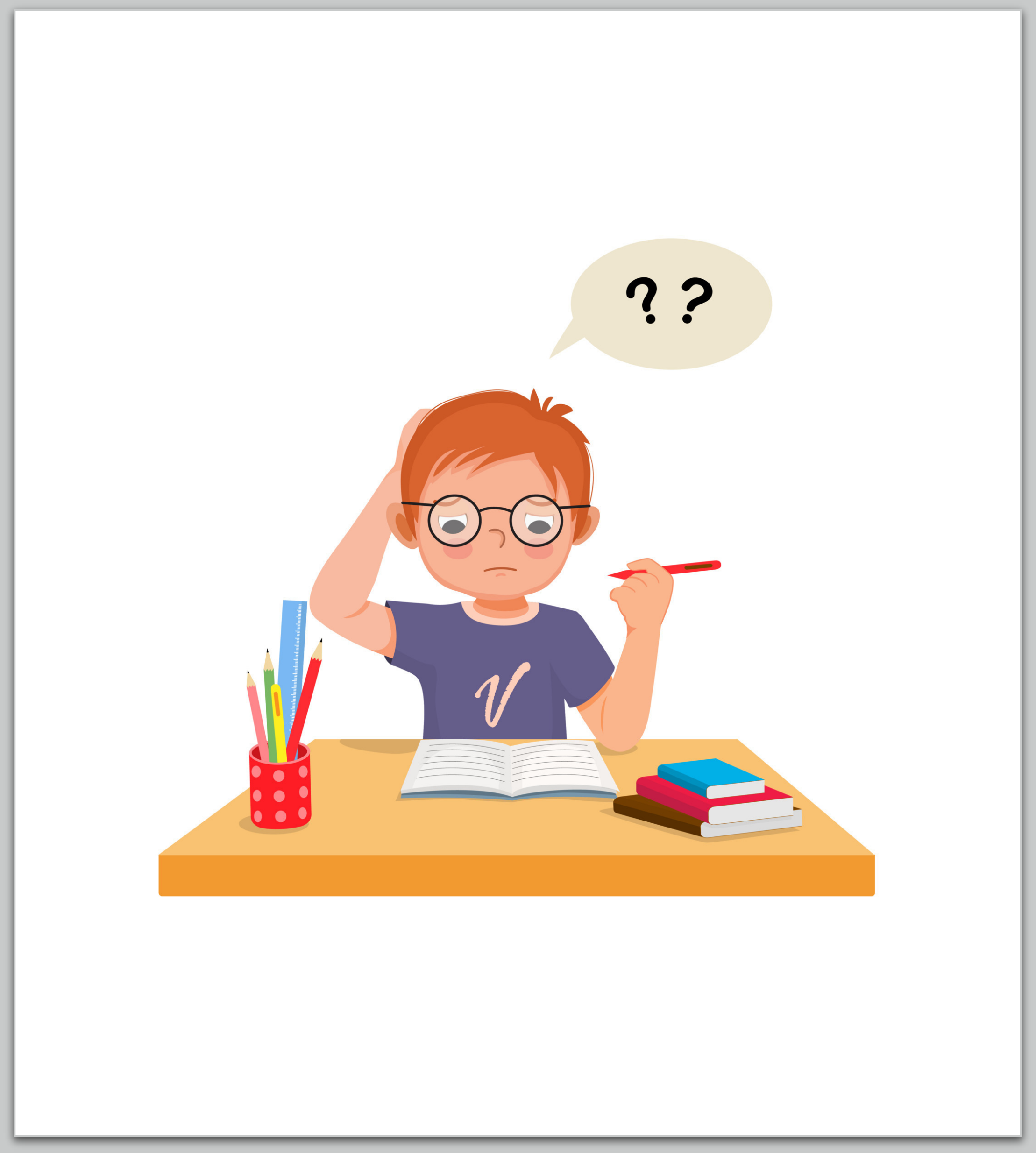
Lineare Gleichungssysteme

Maren Keller

Kiana Gaini-Rahimi

Gliederung

1. Einleitung
2. Lösungsverfahren
3. Lösungen
4. Aufgaben
5. Gaußverfahren – gemeinsames Beispiel
6. Aufgaben



$$\begin{array}{l|l|} \mathrm{I} & 4x + 2y = 40 \\ \mathrm{I} & 12x - 28y = 52 \end{array} \cdot$$

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{I} & -12x - 6y = -120 \\ \mathrm{II} & 12x - 28y = 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{I} & -12x - 6y = -120 \\ \mathrm{I} & 12x - 28y = 52 \end{array}$$

Einleitung

- Menge von linearen Gleichungen
- Eine oder mehrere Unbekannte
- Lösung eines LGS muss alle Gleichungen erfüllen

Lösungsverfahren

- Additionsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren
- Äquivalenzumformungen
- Unterbestimmte und überbestimmte LGS

Obacht Mathe

Lineare Gleichungssysteme (= LGS) (Zusammenfassung)

Einsetzungsverfahren:

Wenn eine Gleichung bereits nach einer Variablen aufgelöst ist

$$\begin{aligned} &(I) && 9x - 7y = 44 \\ &(II) \wedge && y = 2x - 12 \end{aligned}$$

y in (I) eingesetzt:

$$(I) \quad 9x - 7 \cdot (2x - 12) = 44$$

...

Gleichsetzungsverfahren:

Wenn zwei Seiten der Gleichung den gleichen Ausdruck enthalten

$$\begin{aligned} &(I) && 2y = 4x - 8 \\ &(II) \wedge && 2y = -2x - 26 \end{aligned}$$

(I) = (II)

$$4x - 8 = -2x - 26$$

...

Additionsverfahren:

Wenn in beiden Gleichungen Variablen mit gleichen Koeffizienten, aber verschiedenen Vorzeichen auftreten

$$\begin{aligned} &(I) && 3x + 4y = 7 \\ &(II) \wedge && 2x - 4y = 38 \end{aligned}$$

(I) + (II)

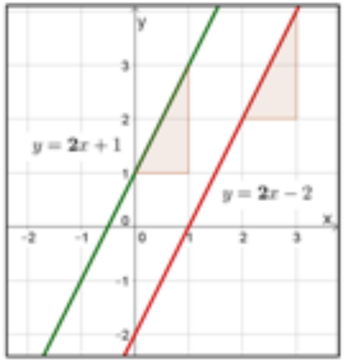
$$3x + 4y + 2x - 4y = 7 + 38$$

...

Beispiel 1

$I\colon y = 2x + 1$

$II\colon y = 2x - 2$

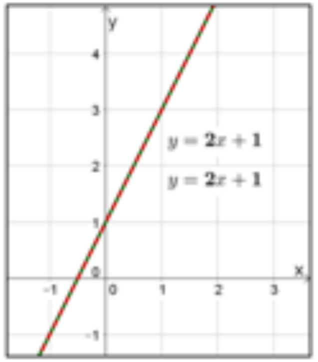


LGS hat keine Lösung, da die zugehörigen Geraden parallel verlaufen und somit keinen gemeinsamen Punkt haben.

Beispiel 2

$I\colon y = 2x + 1$

$II\colon y = 2x + 1$

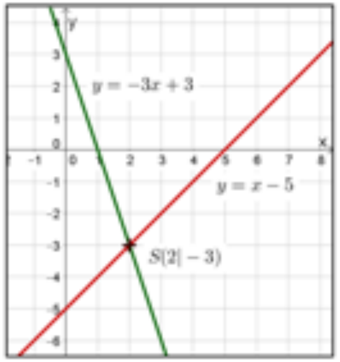


LGS hat unendlich viele Lösungen, da die zugehörigen Geraden identisch sind und somit unendlich viele Punkte gemeinsam haben.

Beispiel 3

$I\colon y = -3x + 3$

$II\colon y = x - 5$



LGS hat genau eine Lösung, da sich die zugehörigen Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Koordinaten des Schnittpunktes $S(x, y)$ lösen als Zahlenpaar das Gleichungssystem.

Keine Lösung | Lösungsschar | Eindeutige Lösung

Lösungen

Aufgaben

a) $3x + 9y - 3z = 15$
$-8x - 19y + 3z = 6$
$2x + y + 3z = 0$

b) $3x + 9y - 3z = 15$
$-8x - 19y + 3z = -30$
$2x + y + 3z = 0$

c) $x + y - z = 0$
$x + 2y = 3$
$y + z = 3$

Gaußverfahren

- Gauß'sche Eliminationsverfahren
- Drei Schritte nötig
    1. Finden der Zeilenstufenform
    2. Ablesen der ersten Lösung
    3. Rückwärts einsetzen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 1 & 1 & r-1 & 2 \\ 1 & r & r-2 & 4 \end{array}\right)$$

$II a = I - 2II$
$III a = II - III$

$$\begin{array}{c} \\ II a \\ III a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 0 & r & -r & 4 \\ 0 & 1-r & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$III b = II a + r \cdot III a$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 0 & r & -r & 4 \\ 0 & 2r-r^2 & 0 & 4-2r \end{array}\right)$$

Aufgaben

a) Drei Personen werden nach ihrem Vermögen gefragt. Der erste und der zweite besitzen zusammen um 20 Denare mehr als der dritte; der erste und der dritte haben zusammen um 40 Denare mehr als der zweite; und der zweite und der dritte haben zusammen um 30 Denare mehr als der erste. Wie viel besitzt jeder der drei? (nach Diophant, 3. Jh. n. Chr.)

b) Ein Hotel, das über 1-Bett-, 2-Bett- und 3-Bett-Zimmer verfügt, bietet bei insgesamt 37 Zimmern 61 Betten an. Die Anzahl der 3-Bett-Zimmer ist um 3 niedriger als die der Doppelzimmer. Über wie viele Zimmer der jeweiligen Kategorie verfügt das Hotel?

Einbett: $\overset{x}{e}$, Zweibett: $\overset{y}{z}$, Dreibett: $\overset{z}{d}$

a)

$$\text{I} \quad x + y = 20 + z$$
$$\text{II} \quad x + z = 40 + y$$
$$\text{III} \quad y + z = 30 + x$$

b)

$$\text{I} \quad x + y + z = 37$$
$$\text{II} \quad x + 2y + 3z = 61$$
$$\text{III} \quad z = y - 3$$