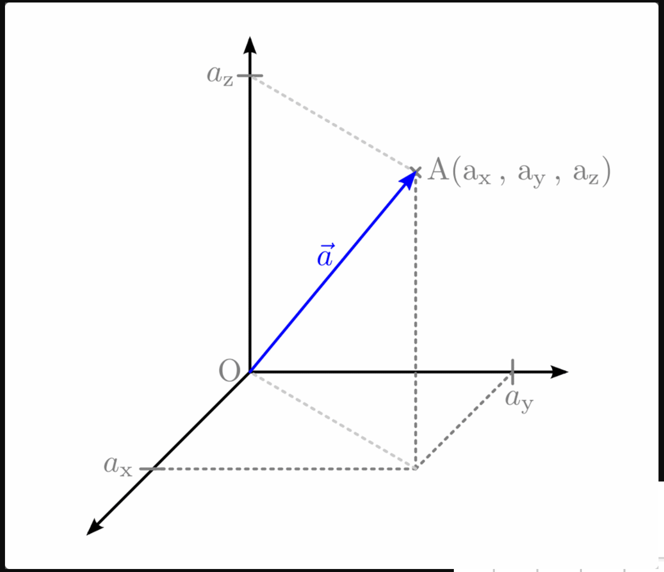
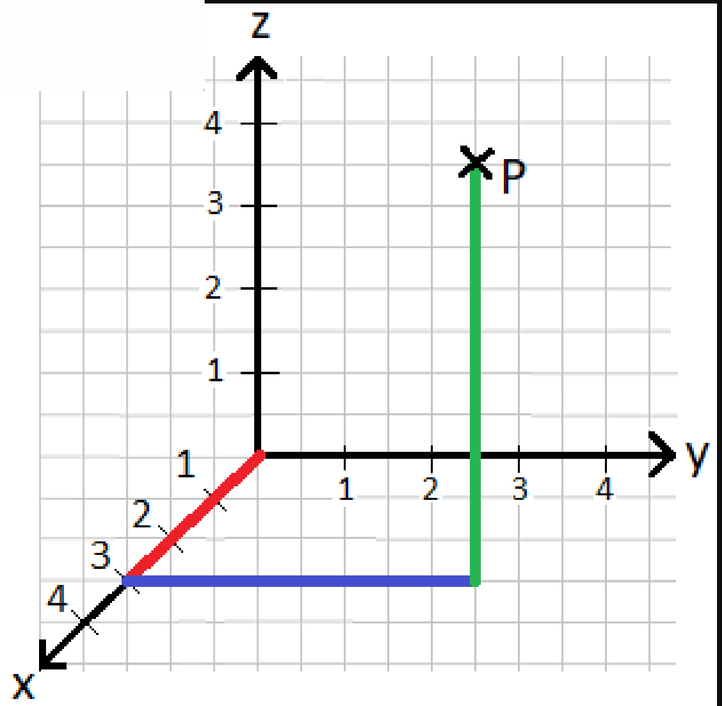
Orientieren und Bewegen im Raum

Bun und Mathis





Räumliche Koordinatensysteme

- Punke sind durch ihre Koordinaten eindeutig festgelegt, aber im kartesischen Koordinatensystem nicht immer Eindeutig ablesbar
- Abstand und Mittelpunkte:

Gegeben sind zwei Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
Für den **Abstand** d der Punkte A und B gilt $d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2}$.

Für den **Mittelpunkt** M der Strecke $\overline{AB}$ gilt $M\left(\frac{a_1 + b_1}{2} \middle| \frac{a_2 + b_2}{2} \middle| \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$.

Vektoren

Ein **Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Verschiebung im Raum.

Zu zwei gegebenen Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ verschiebt der Vektor

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ den Punkt A auf den Punkt B.

Vektoren

$$\vec{x}=\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix} \qquad \vec{k}=\begin{vmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{y}=\begin{vmatrix} 1 \\ 1.5 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \vec{z}=\begin{vmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix}$$

<u>Betrag eines Vektors:</u>

$$|\vec{a}\,| = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2} \qquad \text{für zweidimeinsionale Vektoren}$$

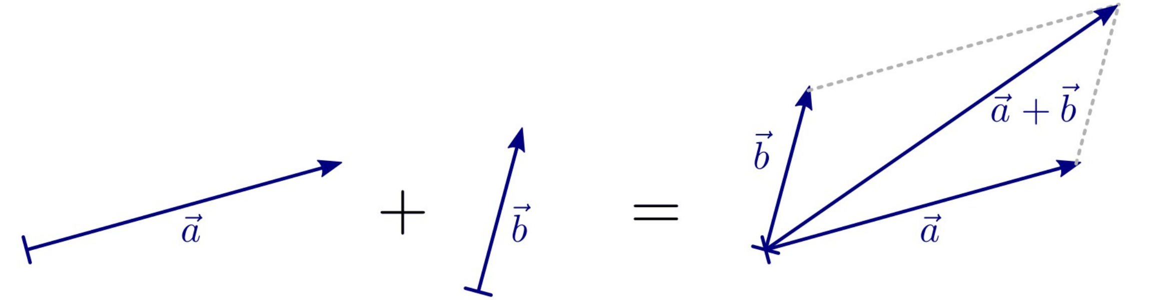
$$|\vec{a}\,| = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2 + a_{\mathrm{z}}^2} \qquad \text{für dreidimeinsionale Vektoren}$$

<u>Parallelität</u>: Zwei Vektoren heißen Kollinear, wenn ein Faktor k existiert, sodass ein Vektor als k-faches des anderen erzeugt werden kann.

Sind die Vektoren kollinear?

Vektoren

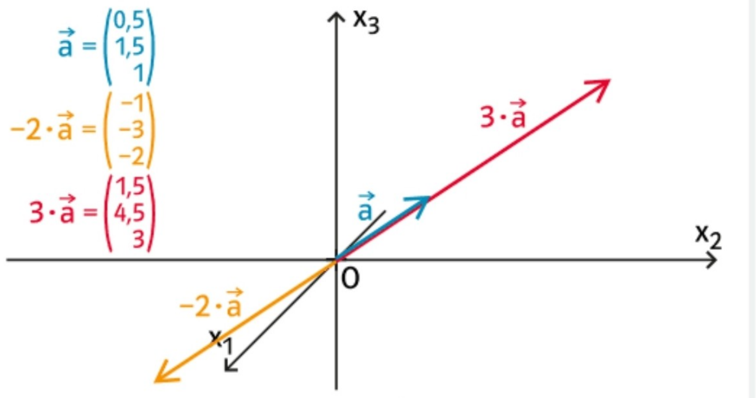
Addition:



$$\overrightarrow{a+b} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation:

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl



Vektoren

Ein Ortsvektor beginnt im Ursprung und endet im Punkt

Der Gegenvektor ist gleich lang und entgegengesetzt ausgerichtet.

Ein normierter Vektor hat die Länge 1. Man erhält ihn indem man einen Vektor mit dem Kehrwert seines Betrags multipliziert.

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Kleine Aufgabe

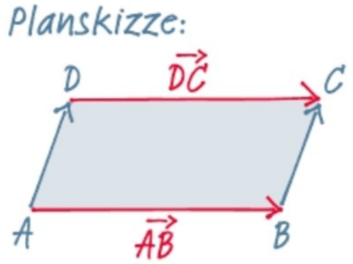
Beispiel 2 Parallelität von Strecken nachweisen

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$, $B(3|-2|1)$, $C(2{,}25|-1{,}3|7)$ und $D(0{,}25|2{,}7|9)$. Prüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Lösung

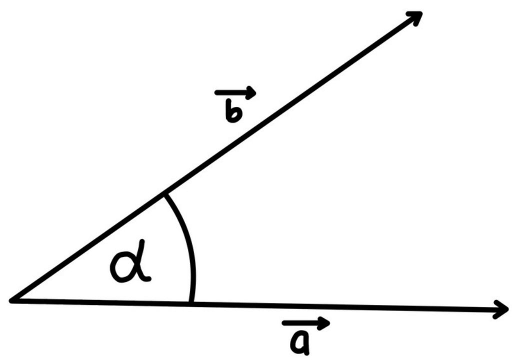
Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2{,}25-0{,}25 \\ -1{,}3-2{,}7 \\ 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ist, sind die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zueinander parallel und gleich lang. Also ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.



Man könnte auch $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ zeigen

Was ist das Skalarprodukt? Themengebiet: Lineare Algebra und Vektorenrechnung



”Wert, der beim Multiplizieren zweier Vektoren entsteht”

= ein Skalar (reelle Zahl)

Vorraussetzung: Beide Vektoren haben gleich viele Komponente

Wie berechnet man das Skalarprodukt?

Allgemein: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} = a1 \cdot b1 + a2 \cdot b2$

In der Ebene :)

Raum: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} = a1 \cdot b1 + a2 \cdot b2 + a3 \cdot b3$

Zwei kleine Aufgaben zum Skalarprodukt

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{2}{3} \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Verwendung des Skalarprodukts

Wozu kann man das Skalarprodukt verwenden?

1. Senkrechte Vektoren oder auch Orthogonalität

• Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal, wenn sie einen rechten Winkel bilden und ihr Skalarprodukt gleich NULL ist.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Überprüfe ob $\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} \begin{pmatrix}2\\9\\-1\end{pmatrix}$

ORTHOGONAL zueinander sind.

Checklist:

1) Wie kann die Orthogonalität bewiesen werden?

Formel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2) Geg. Vektoren einsetzen

↳ auflösen

$$-4 \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 1\,(-1) = 0$$

Verwendung des Skalarprodukts

Wozu kann man das Skalarprodukt verwenden?

2. Länge eines Vektors bestimmen

↳ ist gleich die Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst

In der Ebene ⇒ $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Im Raum ⇒

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Checklist:

1) Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit sich selbst
2) Wurzel für die LÄNGE

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3$

$= 34$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{34}$

✓

Verwendung des Skalarprodukts

Wozu kann man das Skalarprodukt verwenden?

Winkelarten herausfinden

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ =0 entspricht einem rechten Winkel-> orthogonal

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ <0 entspricht einem stumpfen Winkel

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ >0 entspricht einem spitzem Winkel

1. Ist das Skalarprodukt eine positive Zahl, so ist der Winkel, den die beiden Vektoren einschließen ein spitzer Winkel.
2. Ist das Skalarprodukt Null, so ist der Winkel, den die beiden Vektoren einschließen ein rechter Winkel.
3. Ist das Skalarprodukt eine negative Zahl, so ist der Winkel, den die beiden Vektoren einschließen ein stumpfer Winkel.

3. Winkel zwischen Vektoren

es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

umformen

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

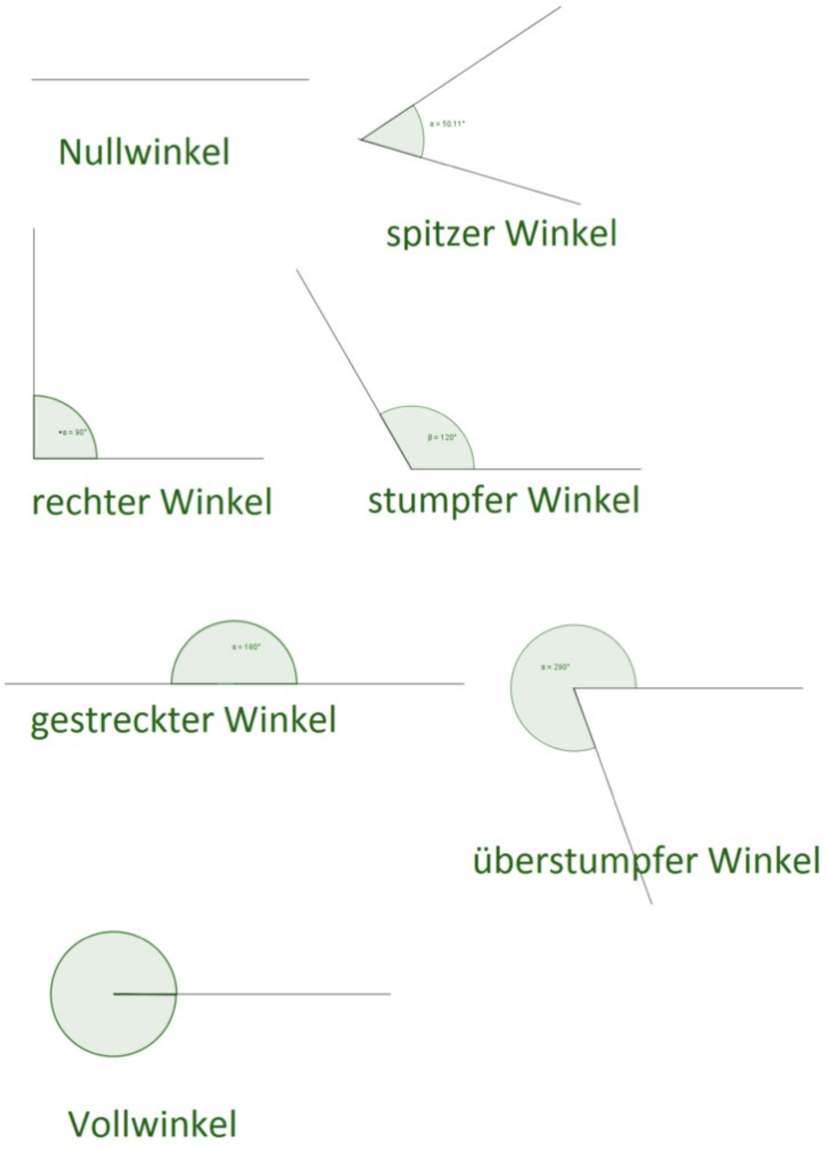
Aufgabe

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ k \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

b) Bestimme k im Vektor $\vec{c}$, dass $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen Winkel von 60° bilden


Nullwinkel
spitzer Winkel
rechter Winkel
stumpfer Winkel
gestreckter Winkel
überstumpfer Winkel
Vollwinkel

Verwendung des Skalarprodukts

Wozu kann man das Skalarprodukt verwenden?

4. Sind die Vektoren parallel?

⇒ Parallelität bestimmen

- Zwei Vektoren sind parallel, wenn ihre Richtung übereinstimmt, d.h ein Vektor ist ein Vielfaches oder ein Bruchteil des anderen.

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel, wenn es einen Skalar $r \neq 0$ gibt, so dass

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} \text{ gillt}$$

Checklist: Setze $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein

Aufgabe Parallel?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ja? Nein?

Aufgabe

geg. A(-5|5|0), B(-5|25|0), D(0|0|15)
E(0|30|15), F(-25|5|15), G(-10|10|35)

1) Zeige, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.

2) Bestimmt für das Dreieck DEF die Größe des Innenwinkels an E