Lineare Gleichungssysteme

Was sind LGS?

Ein lineares Gleichungssystem (kurz LGS) ist in der linearen Algebra eine Menge linearer Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Eine Lösung eines LGS muss alle Gleichungen gleichzeitig erfüllen.

Welche Lösungsverfahren gibt es?

- Additionsverfahren (Wenn die Gleichungen „**entgegengesetzte**“ **Terme** enthalten)
- Einsetzungsverfahren (Wenn nur eine Gleichung nach **einer Variablen aufgelöst** ist)
- Gleichsetzungsverfahren (Wenn zwei Gleichungen nach **derselben Variable aufgelöst** sind)

- Äquivalenzumformungen: man verändert den Wahrheitswert nicht (Nutzung von Addition, Subtraktion, Multiplizieren und Division)
- Unterbestimmtes LGS: weniger Gleichungen als Variablen
- Überbestimmtes LGS: mehr Gleichungen als Variablen

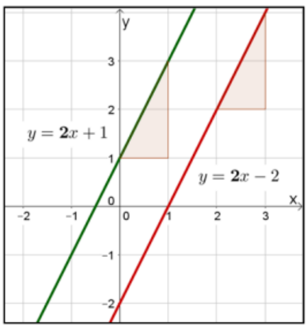
Wie muss ich die Lösungen interpretieren?

- Eindeutige Lösung: Jede Unbekannte kann eindeutig und ohne Widerspruch gelöst werden (Geometrische Interpretation: Objekte schneiden sich in genau einem Punkt).
- Keine Lösung: Die Lösung enthält einen Widerspruch (Geometrische Interpretation: Objekte schneiden sich nicht).
- Lösungsschar: Es gibt mehrere Lösungen (Geometrische Interpretation: Objekte schneiden sich in einer Geraden oder Ebene).

Beispiel 1

$I\colon y = 2x + 1$

$II\colon y = 2x - 2$

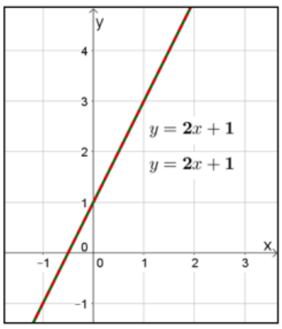


LGS hat keine Lösung, da die zugehörigen Geraden parallel verlaufen und somit keinen gemeinsamen Punkt haben.

Beispiel 2

$I\colon y = 2x + 1$

$II\colon y = 2x + 1$

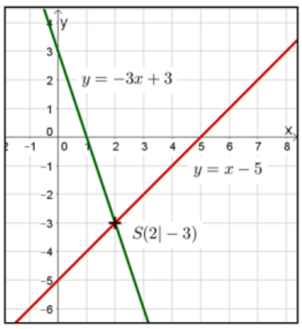


LGS hat unendlich viele Lösungen, da die zugehörigen Geraden identisch sind und somit unendlich viele Punkte gemeinsam haben.

Beispiel 3

$I\colon y = -3x + 3$

$II\colon y = x - 5$



LGS hat genau eine Lösung, da sich die zugehörigen Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Koordinaten des Schnittpunktes $S(x, y)$ lösen als Zahlenpaar das Gleichungssystem.

<u>Wie ging nochmal das Gaußverfahren?</u>

Eliminationsverfahren mit Koeffizientenmatrizen

1. Finden der Zeilenstufenform: Gleichungssystem so umformen, dass bei der ersten Gleichung noch alle Unbekannte auftauchen, bei der mittleren nur noch zwei und bei der letzten Gleichung nur noch eine Unbekannte.
2. Ablesen der ersten Lösung: In der dritten Zeile des Gleichungssystems findest du jetzt direkt die Lösung für eine der Variablen.
3. Rückwärts einsetzen: Mit der Unbekannten, die du jetzt kennst, kannst du die beiden anderen Variablen berechnen.

Beispiel 1 LGS mit dem Gauß-Verfahren lösen

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 & \\ \text{II} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \text{IIa} = \text{I} - \text{II} \\ \text{III} & 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -9 & \text{IIIa} = \text{I} - 2 \cdot \text{III} \end{array}$$

(1) Damit x_1 in den Gleichungen II und III „wegfällt", ersetzt man II durch die Differenz aus I und II und III durch die Differenz aus I und 2 · III.

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 & \\ \text{IIa} & 4x_2 - 3x_3 = -4 & \\ \text{IIIa} & -4x_2 + 8x_3 = 14 & \text{IIIb} = \text{IIIa} + \text{IIa} \end{array}$$

(2) Damit x_2 in der Gleichung IIIa „wegfällt", ersetzt man IIIa durch die Summe von IIIa und IIa.

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 \\ \text{IIa} & 4x_2 - 3x_3 = -4 \\ \text{IIIb} & 5x_3 = 10 \end{array}$$

(3) Man bestimmt die Lösung aus der Stufenform:
$x_3 = 2$, $x_2 = 0{,}5$ und $x_1 = -1$.
Lösung: $(-1; 0{,}5; 2)$.